N. 268

Ueber die

Bestimmung der Absteckungselemente

für

die sieben Kehrtunnels

der

Gotthardbahn.

Von

Dr. C. KOPPE.

Separat-Abdruck aus der „EISENBAHN"
(Band XIII, Nr. 6 und 7 vom 7. und 14. August 1880).

ZÜRICH
Druck von ORELL FÜSSLI & Co.

Ueber die Bestimmung der Absteckungs-Elemente

für die sieben Kehrtunnels der Gotthardbahn.

Von **Dr. C. Koppe.**

In die beiden Zufahrtsrampen zum Gotthardtunnel sind zur Entwickelung der Linie sieben Kehrtunnels eingeschaltet, auf der Nordseite drei, auf der Südseite vier, deren Länge zwischen 1 und 2 *km* variirt und die mehr oder weniger einen vollen Kreisbogen im Innern des Berges beschreiben. Die Absteckungselemente für diese Tunnels wurden auf der Nordseite durch den Sectionsgeometer, Hrn. Mächler, auf der Südseite durch den Sectionsgeometer, Hrn. Dress, bestimmt. Jeder von ihnen mass ferner zur genauen Längenbestimmung zwei Grundlinien. Die bei dieser Messung benutzten 5 *m* Latten wurden als Normalmaass betrachtet und Letzteres zur steten Vergleichung und eventuellen Correction der Latten dauernd festgelegt, da die Längenmessung im Tunnel selbst einen sehr wesentlichen Factor für die Absteckung bildet. Im vergangenen Herbste und in diesem Frühjahr wurde eine zweite Bestimmung der Absteckungselemente vorgenommen, zu welcher die Winkelmessungen zum grössten Theile von den beiden genannten Herren Sectionsgeometern, zum geringern Theile im Verein mit jenen von Unterzeichnetem ausgeführt wurden. Zugleich wurde auch die Längenbestimmung durch Nachmessen einer geeigneten Länge controlirt. Auf der Nordseite war die Bestimmung der Absteckungselemente kurz vorher durch Hrn. Mächler ausgeführt worden; seine Signale standen noch unverändert so, wie er sie benutzt hatte; es genügten daher einige Nachmessungen resp. Ergänzungen und eine Neuberechnung des Ganzen auf etwas anderm Wege. Auf der Südseite waren seit der Bestimmung des Hrn. Dress zwei Jahre verflossen. In Folge des Baues der Linie waren die von ihm benutzten Signale zum Theil fortgefallen, zum Theil durch andere ersetzt worden; es wurde daher dort eine vollständige Neubestimmung der Absteckungsdaten nothwendig, da auf eine andere Weise eine Controle nicht zu erreichen gewesen wäre. Die Differenzen, welche sich schliesslich durch die neue Bestimmung gegenüber der frühern ergaben, waren bei allen sieben Kehrtunnels so gering, dass sie innerhalb der unvermeidlichen Beobachtungsfehler lagen und für die Bauausführung nicht in Betracht kamen.

Die definitiven Signale, welche zur Uebermittelung der Richtung und der Länge in die Tunnels hinein dienen, liegen unmittelbar vor den Tunnelportalen in Einschnitten, von denen aus oft nur die gegenüberliegende Berglehne sichtbar ist. Da sie in Folge dessen zur Bildung eines guten Dreiecksnetzes sich meist nicht recht eignen, so wurde für jeden Tunnel ein besonderes Netz gebildet und in dieses die zur Absteckung nöthigen Punkte eingeschaltet. Dies Verfahren gestattet eine Anwendung der Ausgleichungsrechnung bei verhältnissmässig geringer Rechenarbeit und eignet sich daher auch zu ausgedehnter Anwendung bei anderweitigen Vermessungen; z. B. findet es vielfache Anwendung bei Landesvermessungen. Es sei mir gestattet, das zur Controle der Absteckungselemente für die Kehrtunnels angewandte Verfahren an einem Beispiele kurz darzulegen und zwar wähle ich hiezu den am meisten nödlich und den am meisten südlich gelegenen Kehrtunnel, den Pfaffensprung und den Travi-Tunnel.

Zu den Winkelmessungen auf der Nordseite diente ein siebenzölliger Theodolith mit zwei Nonien, die zehn Secunden gaben; die Winkel wurden mit ihm zehn oder zwölf Mal repetirt, halb in der einen halb in der andern Lage des Fernrohrs. Auf der Südseite wurde ein achtzölliger Theodolith mit vier Nonien benutzt und für die Kehrtunnels in der Biaschina nach Richtungen beobachtet. Bei Dazio grande kehrten wir zum Repetitionsverfahren zurück, weil dasselbe bei schwierigeren Terrainverhältnissen oft noch eine Winkelmessung auf Punkten gestattet, auf welchen ein Beobachten nach Richtungen unmöglich sein würde. Das Tessin-Thal ist dort so tief eingeschnitten, die Felswände fallen so schroff und steil ab, dass die Dreieckspunkte bisweilen unmittelbar an den Rand des Absturzes gelegt werden mussten, um von unten gesehen werden zu können. In diesen Fällen, wie namentlich auch an steilen Berglehnen war, ein Herumgehen um das Instrument nicht mehr möglich. Durch ein solches Herumgehen wird zudem die unveränderte Stellung des Instrumentes gefährdet, wenn der Untergrund nicht sehr solid ist, während es beim Repetiren der Winkel meist immer möglich ist, dieselbe Stellung für die Dauer der Messung beizubehalten. Es ist dies ein wesentlicher Vortheil der Repetitionsmethode bei Messungen, wo in Folge der geringen Entfernungen die constanten Fehler derselben nicht in Betracht kommen. Ist hingegen die Bedingung der soliden Aufstellung des Instrumentes und der bequemen und hinreichend genauen Ablesung der Theilung erfüllt, so wird man beim Richtungsbeobachten gleichmässiger und rascher arbeiten und daher diesem Verfahren den Vorzug geben.

I. Pfaffensprung-Kehrtunnel.

Das stark ausgezogene bildet das Hauptnetz mit den fünf Stationen *B*, *M*, *H*, *S*, *WP*. In dasselbe wurden die beiden zur Messung in den Tunnel dienenden, in den Tangenten gelegenen Punkte *E* (Eingang) und *A* (Ausgang) eingeschaltet. Da der Punkt *A* verhältnissmässig weit vom Tunnelportal liegt, so bestimmte man seine Entfernung von demselben ebenfalls trigonometrisch. Auf den Stationen des Hauptnetzes wurden für dieses möglichst alle Winkelcombinationen gemessen, für sich ausgeglichen und dann sämmtliche Richtungen (und somit auch alle Winkel zwischen ihnen) als gleichwerthig angesehen. Die Resultate waren:

Station S.

$H = 0^0\ 0'\ 0'' + (1)$
$B = 11\ 49\ 47 + (2)$
$WP = 35\ 24\ 39 + (3)$

Station H.

$M = 0^0\ 0'\ 0'' + (4)$
$B = 39\ 20\ 7 + (5)$
$WP = 97\ 18\ 9 + (6)$
$S = 188\ 3\ 20 + (7)$

Station WP.

$S = 0^0\ 0'\ 0'' + (8)$
$H = 53\ 50\ 15 + (9)$
$M = 86\ 24\ 34 + (10)$
$B = 106\ 58\ 38 + (11)$

Station M.

$B = 0^0\ 0'\ 0'' + (12)$
$WP = 35\ 51\ 23 + (13)$
$H = 85\ 58\ 42 + (14)$

Uebersichtsplan der drei Kehrtunnels auf der Nordrampe der Gotthardbahn.

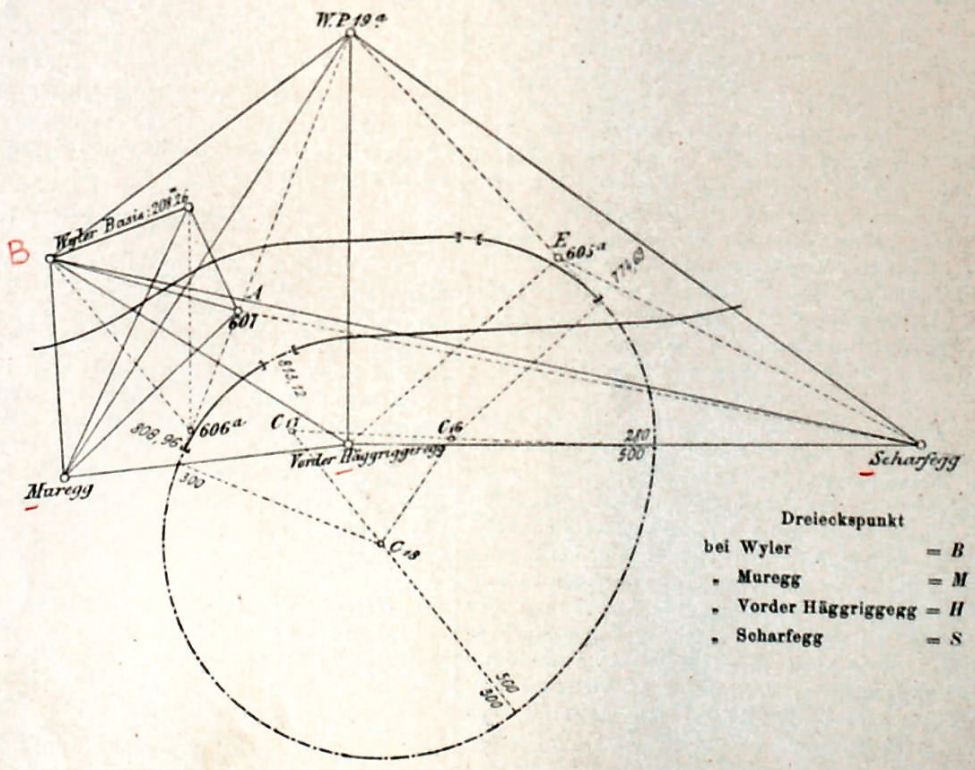
Masstab 1 : 25 000.

Station B.

$WP =$	0^0	$0'$	$0''$	$+(15)$
$S =$	49	26	42,5	$+(16)$
$H =$	68	53	40	$+(17)$
$M =$	123	34	33	$+(18)$

$$-(1)+(3)-(6)+(7)-(8)+(9)+5''=0$$
$$-(4)+(6)-(9)+(10)-(13)+(14)-13=0$$
$$-(2)+(3)-(8)+(11)-(15)+(16)+12{,}5=0$$
$$-(1)+(2)-(5)+(7)-(16)+(17)-2{,}5=0$$

Pfaffensprung-Tunnel.



Masstab 1 : 10 000.

Zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Correctionen dieser 18 Richtungen, welche ihnen als eingeklammerte Zahlen beigefügt sind, gibt das Netz die folgenden sieben Bedingungsgleichungen

$$-(10)+(11)-(12)+(13)-(15)+(18)\pm 0=0$$
$$-70{,}9(1)+100{,}5(2)-29{,}6(3)-15{,}4(8)+31{,}2(9)-15{,}8(11)$$
$$-8{,}1(15)+59{,}6(16)+51{,}5(17)+1078=0$$

$$-25{,}6(4) + 38{,}8(5) - 13{,}2(6) - 15{,}8(9) + 56{,}1(10) - 40{,}3(11)$$
$$-27{,}7(12) + 29{,}2(13) - 1{,}5(14) - 388 = 0$$

Die 18 wahrscheinlichsten Richtungscorrectionen, deren Quadratsumme ein Minimum werden soll, sind durch diese sieben streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen von einander abhängig. Um aus der Summe ihrer Quadrate ebensoviele, wie Bedingungsgleichungen vorhanden sind, zu eliminiren, multiplicirt man letztere mit den Correlaten $k_1 \ldots k_7$, addirt sie zur Summe der 18 Quadrate der Verbesserungen, differencirt nach allen 18 und erhält, nachdem man noch, um die Coefficienten der Bedingungsgleichungen einander näher zu bringen, die ersten fünf mit 10 multiplicirt, die beiden letzten mit 10 dividirt hat,

$$\begin{aligned}
(1) &= -10\,k_1 - 10\,k_7 - 7{,}09\,k_6 \\
(2) &= -10\,k_3 + 10\,k_4 + 10{,}05\,k_6 \\
(3) &= +10\,k_1 + 10\,k_3 - 2{,}96\,k_6 \\
(4) &= -10\,k_2 - 2{,}56\,k_7 \\
(5) &= -10\,k_4 + 3{,}88\,k_7 \\
(6) &= -10\,k_1 + 10\,k_2 - 1{,}32\,k_6 \\
(7) &= +10\,k_1 + 10\,k_4 \\
(8) &= -10\,k_1 - 10\,k_3 - 1{,}54\,k_6 \\
(9) &= +10\,k_1 - 10\,k_2 + 3{,}12\,k_6 - 1{,}58\,k_7 \\
(10) &= +10\,k_2 - 10\,k_5 + 5{,}61\,k_7 \\
(11) &= +10\,k_3 + 10\,k_5 - 1{,}58\,k_6 - 4{,}03\,k_7 \\
(12) &= -10\,k_5 - 2{,}77\,k_7 \\
(13) &= -10\,k_2 + 10\,k_5 + 2{,}92\,k_7 \\
(14) &= +10\,k_2 - 0{,}15\,k_7 \\
(15) &= -10\,k_3 - 10\,k_5 - 0{,}81\,k_6 \\
(16) &= +10\,k_3 - 10\,k_4 + 5{,}96\,k_6 \\
(17) &= +10\,k_4 - 5{,}15\,k_6 \\
(18) &= +10\,k_5
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die sieben Bedingungsgleichungen erhält man zur Bestimmung der $k_1 \ldots k_7$ die Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
&-600\,k_1 - 200\,k_2 + 200\,k_3 + 200\,k_4 \quad . \quad + 87{,}9\,k_6 - 2{,}6\,k_7 + 50 = 0 \\
&-200\,k_1 + 600\,k_2 \quad . \quad . \quad - 200\,k_5 - 31{,}2\,k_6 + 53{,}6\,k_7 - 130 = 0 \\
&+200\,k_1 \quad . \quad + 600\,k_3 - 200\,k_4 + 200\,k_5 - 62{,}8\,k_6 - 40{,}3\,k_7 + 125 = 0 \\
&+200\,k_1 \quad . \quad - 200\,k_3 + 600\,k_4 \quad . \quad + 60{,}3\,k_6 - 38{,}8\,k_7 - 25 = 0 \\
&\quad . \quad - 200\,k_2 + 200\,k_3 \quad . \quad + 600\,k_5 + 7{,}7\,k_6 - 39{,}5\,k_7 - 0 = 0 \\
&-87{,}9k_1 - 31{,}2k_2 - 63{,}8k_3 + 60{,}3k_4 - 7{,}7\,k_5 + 237{,}3\,k_6 + 1{,}4\,k_7 + 107{,}8 = 0 \\
&-2{,}6\,k_1 + 53{,}6k_2 - 40{,}3k_3 - 38{,}8k_4 - 39{,}5k_5 + 1{,}4\,k_6 + 89{,}8\,k_7 - 38{,}8 = 0
\end{aligned}$$

hieraus

$k_1 = +0{,}4796$	und weiter	$(1) = +2{,}65''$	$(10) = +0{,}65$
$k_2 = +0{,}4694$		$(2) = -2{,}85$	$(11) = -1{,}58$
$k_3 = -0{,}6547$		$(3) = +0{,}21$	$(12) = -3{,}40$
$k_4 = -0{,}2750$		$(4) = -4{,}49$	$(13) = -1{,}31$
$k_5 = +0{,}3611$		$(5) = +2{,}45$	$(14) = +4{,}71$
$k_6 = -0{,}6614$		$(6) = \pm 0$	$(15) = +3{,}47$
$k_7 = -0{,}0777$		$(7) = +2{,}05$	$(16) = -7{,}74$
		$(8) = +2{,}77$	$(17) = +0{,}66$
		$(9) = -1{,}84$	$(18) = +3{,}61$

Bringt man diese wahrscheinlichsten Correctionen an die 18 Netzrichtungen an und nimmt im Anschluss an frühere Bestimmungen für die Coordinaten von

$$S \ldots y = -89\,318{,}900 \qquad x = +25\,382{,}080$$
$$H \ldots y = -89\,803{,}859 \qquad x = +24\,753{,}057$$

rechnet mit diesen die Coordinaten der andern Punkte, so erhält man folgende:

Zusammenstellung für das Hauptnetz.

Stationen	Coordinaten	Richtung	Ausgegl. W.	Azimuthe	log. d. Seiten
S	$y = -89\,318{,}900$	H	0° 0′ 0,0″	217° 37′ 52,3″	2,899 964 6
	$x = +25\,382{,}080$	B	11 49 41,5	229 27 33,8	3,092 856 0
		WP	35 24 36,6	253 2 28,9	2,992 873 8
H	$y = -89\,803{,}859$	M	0 0 0,0	209 34 25,8	2,601 950 2
	$x = +24\,753{,}057$	B	39 20 13,9	248 54 39,7	2,689 212 8
		WP	97 18 13,5	306 52 39,3	2,755 909 2
		S	188 3 26,5	37 37 52,3	2,899 964 6
WP	$y = -90\,259{,}848$	S	0 0 0,0	73 2 28,9	2,992 873 8
	$x = +25\,095{,}146$	H	53 50 10,4	126 52 39,3	2,755 909 2
		M	86 24 31,9	159 27 0,8	2,867 332 5
		B	106 58 33,6	180 1 2,5	2,714 329 7
M	$y = -90\,001{,}227$	B	0 0 0,0	303 35 35,7	2,492 291 5
	$x = +24\,405{,}257$	WP	35 51 25,1	339 27 0,8	2,867 332 5
		H	85 58 50,1	29 34 25,8	2,601 950 2
B	$y = -90\,260{,}006$	WP	0 0 0,0	0 1 2,5	2,714 329 7
	$x = +24\,577{,}146$	S	49 26 31,3	49 27 33,8	3,092 856 0
		H	68 53 37,2	68 54 39,7	2,689 212 8
		M	123 34 33,1	123 35 35,7	2,492 291 5

Zur Einhaltung der Punkte *E* und *A* in dieses Hauptnetz wurden folgende Winkel gemessen:

Station E.

1. $H - E - WP = 89^0\ 5'\ 15''$
2. $WP - E - S = 160\ 56\ 5{,}5$
3. $S - E - H = 109\ 58\ 34{,}5$

Station S.

4. $H - S - E = 27^0\ 19'\ 6{,}5''$
5. $E - S - WP = 8\ 5\ 41$

Station WP.

6. $S - WP - E = 10^0\ 58'\ 21{,}5''$
7. $E - WP - H = 42\ 51\ 54{,}5$

Station H.

8. $WP - H - E = 48^0\ 2'\ 55''$
9. $E - H - S = 42\ 42\ 18$

Station A.

10. $M - A - B = 60^0\ 0'\ 32{,}5''$
11. $B - A - WP = 95\ 7\ 21{,}0$
12. $WP - A - S = 80\ 4\ 11{,}5$
13. $S - A - M = 124\ 47\ 58{,}0$

Station S.

14. $A - S - WP = 24^0\ 38'\ 27{,}5''$

Station WP.

15. $S - WP - A = 75^0\ 17'\ 16{,}5''$
16. $A - WP - B = 31\ 41\ 19$

Station B.

17. $WP - B - A = 53^0\ 11'\ 36''$
18. $A - B - M = 70\ 23\ 9{,}5$

Station M.

19. $B - M - A = 49^0\ 36'\ 14''$

Nimmt man nun als Näherungswerthe der Coordinaten für

E	*A*
$y_1 = -89\,838{,}16 + dy_1$	$y_2 = -90\,041{,}24 + dy_2$
$x_1 = +25\,139{,}37 + dx_1$	$x_2 = +24\,740{,}76 + dx_2$

rechnet nach der Relation zwischen Azimuth und Coordinaten

$$tang\,\alpha = \frac{y}{x}$$

$$d\alpha = a\,dx + b\,dy$$

die Azimuthe zwischen den gegebenen und den gesuchten Punkten, bildet aus ihnen die Winkel, welche gemessen wurden, so gibt die Vergleichung der gemessenen und der gerechneten Winkel zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Verbesserungen $dy_1 \ldots$ der angenommenen Näherungswerthe die folgenden Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}
v_1 &= +5{,}3\,dx_1 + 4{,}8\,dy_1 + 1{,}5'' \\
v_2 &= -8{,}0\ \text{,,}\ +2{,}0\ \text{,,}\ +0{,}1 \\
v_3 &= +2{,}7\ \text{,,}\ -6{,}8\ \text{,,}\ -6{,}6 \\
v_4 &= -3{,}2\ \text{,,}\ +1{,}5\ \text{,,}\ +6{,}4 \\
v_5 &= +3{,}2\ \text{,,}\ -1{,}5\ \text{,,}\ +4{,}5 \\
v_6 &= +4{,}8\ \text{,,}\ -0{,}5\ \text{,,}\ +3{,}4 \\
v_7 &= -4{,}8\ \text{,,}\ +0{,}5\ \text{,,}\ +2{,}2 \\
v_8 &= -0{,}5\ \text{,,}\ -5{,}3\ \text{,,}\ +0{,}8 \\
v_9 &= +0{,}5\ \text{,,}\ +5{,}3\ \text{,,}\ -0{,}8 \\
v_{10} &= +6{,}7\,dx_2 + 1{,}6\,dy_2 + 1{,}9 \\
v_{11} &= -3{,}4\ \text{,,}\ +8{,}7\ \text{,,}\ -4{,}3 \\
v_{12} &= -4{,}2\ \text{,,}\ -2{,}8\ \text{,,}\ +2{,}7 \\
v_{13} &= +0{,}9\ \text{,,}\ -7{,}5\ \text{,,}\ +2{,}7 \\
v_{14} &= +1{,}6\ \text{,,}\ -1{,}4\ \text{,,}\ -0{,}8 \\
v_{15} &= +2{,}6\ \text{,,}\ +4{,}2\ \text{,,}\ -6{,}4 \\
v_{16} &= -2{,}6\ \text{,,}\ -4{,}2\ \text{,,}\ +8{,}3 \\
v_{17} &= +6{,}0\ \text{,,}\ -4{,}5\ \text{,,}\ +12{,}0 \\
v_{18} &= -6{,}0\ \text{,,}\ +4{,}5\ \text{,,}\ +0{,}3 \\
v_{19} &= -0{,}7\ \text{,,}\ -6{,}1\ \text{,,}\ -6{,}2
\end{aligned}$$

Hierin sind die wahrscheinlichsten Verbesserungen der Winkel $v_1 \ldots v_{19}$, deren Quadratsumme ein Minimum werden soll, in Secunden, die Verbesserungen der Coordinaten $d x_1 \ldots d y_2$ in Centimetern ausgedrückt. Um letztere zu erhalten, hätte man nur die Summe der Quadrate aller 19 Fehlerausdrücke zu bilden und nach den vier Unbekannten $d x_1 \ldots d y_2$ zu differenciren. Es wurde aber schliesslich noch der Winkel, welchen die beiden Tangenten $WP - E$ und $WP - A$ einschliessen, auf dem Winkelpunkte WP mit besonderer Sorgfalt gemessen und es entsteht nun die Bedingung, dass dieser

$$\text{Tangenten-Winkel} = E - WP - A = 64^0\, 18'\, 55{,}0'',$$

ebenso aus den Coordinaten der gesuchten Punkte wieder hervorgeht, wie er gemessen wurde. Die Näherungswerthe ergeben:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Azimuth} & WP - A = 148^0\, 19'\, 51{,}8'' \\ \text{„} & WP - E = 84\ \ 0\ 47{,}0 \end{array}\right\} 64^0\, 19'\, 4{,}8''.$$

Die Bedingungsgleichung lautet daher

$$+ 4{,}8\, d x_1 - 0{,}5\, d y_1 - 2{,}6\, d x_2 - 4{,}2\, d y_2 + 9{,}8 = 0.$$

Aus ihr folgt

$$d y_1 = + 9{,}6\, d x_1 - 5{,}2\, d x_2 - 8{,}4\, d y_2 + 19{,}6$$

setzt man diesen Werth von $d y_1$ in die ersten neun Fehlerausdrücke ein, so gehen dieselben über in

$$\begin{array}{lllll}
v_1 = + 51{,}38\, d x_1 & - 24{,}96\, d x_2 & - 40{,}32\, d y_2 & + 95{,}58 \\
v_2 = + 11{,}20 \quad \text{„} & - 10{,}40 \quad \text{„} & - 16{,}80 \quad \text{„} & + 39{,}30 \\
v_3 = - 62{,}58 \quad \text{„} & + 35{,}36 \quad \text{„} & + 57{,}12 \quad \text{„} & - 139{,}88 \\
v_4 = + 11{,}20 \quad \text{„} & - 7{,}80 \quad \text{„} & - 12{,}60 \quad \text{„} & + 35{,}80 \\
v_5 = - 11{,}20 \quad \text{„} & + 7{,}80 \quad \text{„} & + 12{,}60 \quad \text{„} & - 24{,}90 \\
v_6 = - \quad . \quad \text{„} & + 2{,}60 \quad \text{„} & + 4{,}20 \quad \text{„} & - 6{,}40 \\
v_7 = - \quad . \quad \text{„} & - 2{,}60 \quad \text{„} & - 4{,}20 \quad \text{„} & + 5{,}20 \\
v_8 = - 51{,}38 \quad \text{„} & + 27{,}56 \quad \text{„} & + 44{,}52 \quad \text{„} & - 82{,}38 \\
v_9 = + 51{,}38 \quad \text{„} & - 27{,}56 \quad \text{„} & - 44{,}52 \quad \text{„} & + 82{,}38
\end{array}$$

Die Fehlerausdrücke $v_{10} \ldots v_{19}$ bleiben, da sie y_1 nicht enthalten, ungeändert und treten so, wie sie waren, zu vorstehenden neun hinzu. Da die in ihnen jetzt noch vorkommenden drei Unbekannten durch keine weitere Bedingung mehr an einander gebunden, sämmtliche Fehlerausdrücke also durch von einander unabhängige Grössen ausgedrückt sind, so bildet man die Summe ihrer Quadrate, differencirt nach den drei Verbesserungen $d x_1$ $d x_2$ $d y_2$, und erhält

$$\begin{array}{l}
+ 12\,212{,}3\, d x_1 - 6\,618{,}5\, d x_2 - 10\,691{,}5\, d y_2 + 25\,377{,}1 = 0 \\
- \ 6\,618{,}5\, d x_1 + 3\,799{,}3\, d x_2 + \ 5\,829{,}2\, d y_2 - 13\,890{,}1 = 0 \\
- 10\,691{,}5\, d x_1 + 5\,829{,}2\, d x_2 + \ 9\,744{,}8\, d y_2 - 22\,661{,}9 = 0
\end{array}$$

Die Auflösung ergibt

$$\begin{array}{lll}
d x_1 = - 0{,}852 & \text{reciprokes Gewicht} & = 0{,}0031 \\
d x_2 = + 0{,}642 & \text{„} \quad \text{„} & = 0{,}0048 \\
d y_2 = + 1{,}115 & \text{„} \quad \text{„} & = 0{,}0026
\end{array}$$

Es war $d y_1 = + 9{,}6\, d x_1 - 5{,}2\, d x_2 - 8{,}4\, d y_2 + 19{,}6$

also $d y_1 = - 0{,}347$ reciprokes Gewicht $= 0{,}0075$

Die Summe der Fehlerquadrate $v_1^2 \ldots v_{19}^2$ wird $(v\, v) = 622$ und da $19 - 3 = 16$ Ueberschüssige waren, so wird der mittlere Fehler einer Winkelmessung $m = \pm \sqrt{\frac{622}{16}} = \pm 6{,}2''$

Die definitiven Coordinaten werden somit für

$$\begin{array}{ll}
E & A \\
y_1 = - 89\,838{,}163\, m \pm 5\, mm & y_2 = - 90\,041{,}229\, m \pm 3\, mm \\
x_1 = + 25\,139{,}362\, m \pm 4\, mm & x_2 = + 24\,740{,}765\, m \pm 4\, mm
\end{array}$$

Für den Tangentenwinkel folgt

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Azimuth} & WP - A = 148^0\, 19'\, 45{,}9'' \\ \text{„} & WP - E = 84^0\ 0'\, 50{,}9'' \end{array}\right\} 61^0\, 18'\, 55{,}0''$$

das ist das beobachtete und verlangte Maass.

Die Entfernungen von den Punkten E und A bis zu den Berührungspunkten mit dem Korbbogen aus den drei Radien von 280, 500 und 300 m sind (in der Natur gegeben)

$$\begin{array}{l}
E - \text{Bogenanfang} = 84{,}30\, m \\
A - \text{Bogenanfang} = 228{,}73\, m
\end{array}$$

Die Coordinaten für die beiden Centren des Eingangs- und des Ausgangsbogens werden daher

$$\begin{array}{ll}
C_{280} & C_{300} \\
y = - 89\,725{,}124 & y = - 89\,665{,}814 \\
x = + 24\,869{,}680 & x = + 24\,703{,}607
\end{array}$$

Ihre Entfernung wird $C_{280} - C_{300} = 176{,}346\, m$.

In dem Dreiecke zwischen den drei Centren sind nun alle drei Seiten bekannt. Die Centriwinkel und die ihnen entsprechenden Bogen werden

$$\begin{array}{lll}
C_{280} = 45^0\, 43'\, 56{,}7'' & \text{Bogen} = & 223{,}49\, m \\
C_{500} = 49^0\, 22'\, 15{,}0'' & \text{„} \ = & 430{,}84\, m \\
C_{300} = 149^0\, 12'\, 43{,}3'' & \text{„} \ = & 781{,}27\, m \\
\hline
244^0\, 18'\, 55{,}0'' & & 1\,435{,}60\, m
\end{array}$$

Tangentenwinkel $64^0\, 18'\, 55{,}0''$

Controle $180^0\ 0'\ \ 0''$

Tunnellänge (rund) $= 1\,450\, m$.

Travi-Kehrtunnel.

Durch eine ganz analoge Ausgleichung wie am Pfaffensprung und entsprechende Berechnung erhielt man folgende

Zusammenstellung für das Hauptnetz.

Stationen	Coordinaten	Richtung	Winkel	Azimuthe	*log.* d. Längen
Travi O	$y = - 9\,580{,}648$	Friscio	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$	$32^0\, 53'\, 21{,}2''$	1,895 334 9
	$x = + 8\,149{,}788$	B E	$18^0\, 47'\, 58{,}0''$	$51^0\, 41'\, 19{,}2''$	2,428 870 7
		Leura	$64^0\, 53'\, 32{,}9''$	$97^0\, 46'\, 54{,}0''$	2,073 646 1
Friscio	$y = - 9\,537{,}976$	B E	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$	$59^0\ 7'\, 24{,}5''$	2,291 608 6
	$x = + 8\,215{,}777$	Leura	$78^0\, 32'\, 53{,}3''$	$137^0\, 40'\, 17{,}8''$	2,045 158 4
		Travi O	$153^0\, 45'\, 56{,}7''$	$212^0\, 53'\, 21{,}2''$	1,895 334 9
Leura	$y = - 9\,463{,}259$	Travi O	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$	$277^0\, 46'\, 54{,}0''$	2,073 646 1
	$x = + 8\,133{,}746$	Friscio	$39^0\, 53'\, 23{,}8''$	$317^0\, 40'\, 17{,}8''$	2,045 158 4
		B E	$109^0\, 17'\, 20{,}1''$	$27^0\ 4'\, 14{,}2''$	2,311 574 8
		Rivoi	$157^0\ 9'\, 37{,}4''$	$74^0\, 56'\, 31{,}4''$	2,380 684 9
		Strada	$191^0\, 13'\, 58{,}3''$	$109^0\ 0'\, 52{,}3''$	2,025 788 5
B E	$y = - 9\,370{,}004$	Rivoi	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$	$130^0\, 51'\, 53{,}9''$	2,263 589 4
	$x = + 8\,316{,}212$	Strada	$47^0\, 16'\ 6{,}5''$	$178^0\ 8'\ 0{,}4''$	2,336 770 8
		Leura	$76^0\, 12'\, 20{,}2''$	$207^0\ 4'\, 14{,}2''$	2,311 574 8
		Travi O	$100^0\, 49'\, 25{,}2''$	$231^0\, 41'\, 19{,}2''$	2,428 870 7
		Friscio	$108^0\, 15'\, 30{,}6''$	$239^0\ 7'\, 24{,}5''$	2,291 608 6
Strada	$y = - 9\,362{,}931$	Leura	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$	$289^0\ 0'\, 52{,}3''$	2,025 788 5
	$x = + 8\,099{,}172$	B E	$69^0\ 7'\ 8{,}2''$	$358^0\ 8'\ 0{,}4''$	2,336 770 8
		Rivoi	$124^0\, 36'\, 42{,}3''$	$53^0\, 37'\, 34{,}6''$	2,213 649 4
		B A	$177^0\, 49'\, 11{,}4''$	$106^0\, 50'\ 3{,}7''$	2,564 369 7
		Torcio	$233^0\, 29'\, 38{,}9''$	$162^0\, 30'\, 31{,}1''$	2,377 682 6
Rivoi	$y = - 9\,231{,}246$	B A	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$	$132^0\, 48'\, 44{,}0''$	2,475 684 1
	$x = + 8\,196{,}165$	Torcio	$57^0\, 39'\, 21{,}4''$	$190^0\, 28'\ 5{,}4''$	2,518 593 6
		Strada	$100\ 48'\, 50{,}6''$	$233^0\, 37'\, 34{,}6''$	2,213 649 4
		Leura	$122^0\ 7'\, 47{,}4''$	$254^0\, 56'\, 31{,}4''$	2,380 684 9
		B E	$178^0\ 3'\ 9{,}9''$	$310^0\, 51'\, 53{,}9''$	2,263 589 4
B A	$y = - 9\,011{,}898$	Torcio	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$	$246^0\, 30'\, 55{,}4''$	2,483 648 7
	$x = + 7\,992{,}959$	Strada	$40^0\, 19'\ 8{,}3''$	$286^0\, 50'\ 3{,}7''$	2,564 369 7
		Rivoi	$66^0\, 17'\, 48{,}6''$	$312^0\, 48'\, 44{,}0''$	2,475 684 1
Torcio	$y = - 9\,291{,}215$	Strada	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$	$342^0\, 30'\, 31{,}1''$	2,377 682 6
	$x = + 7\,871{,}598$	Rivoi	$27^0\, 57'\, 34{,}3''$	$10^0\, 28'\ 5{,}4''$	2,518 593 6
		B A	$84^0\ 0'\, 24{,}3''$	$66^0\, 30'\, 55{,}4''$	2 483 648 7

Zur Einschaltung der Punkte WP und Travi U wurden im Mittel aus sechs Sätzen folgende Richtungsbeobachtungen erhalten:

Station WP

B A	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$
Travi *U*	72 13 48,1
Strada	129 17 52,3
Rivoi	196 51 12,5

Station B A

Torcio	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$
Travi *U*	16 9 23,6
WP	62 13 48,4

Station Travi U

Strada	0 0 0,0
Rivoi	43 50 10,4
WP	58 36 26,8
B A	120 18 18,7

Station Strada

Rivoi	0 0 0,0
WP	24 24 58,8
Travi *U*	88 44 26,3

Station Rivoi

B A	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$
WP	12 46 49,8
Travi *U*	53 23 36,1

Die Verbesserungen dieser Richtungsbeobachtungen, deren Quadratsumme zu einem Minimum gemacht werden muss, um die wahrscheinlichsten Werthe zur Einhaltung der Punkte WP

Uebersichtsplan der zwei Kehrtunnels bei Dazio-grande und Freggio.

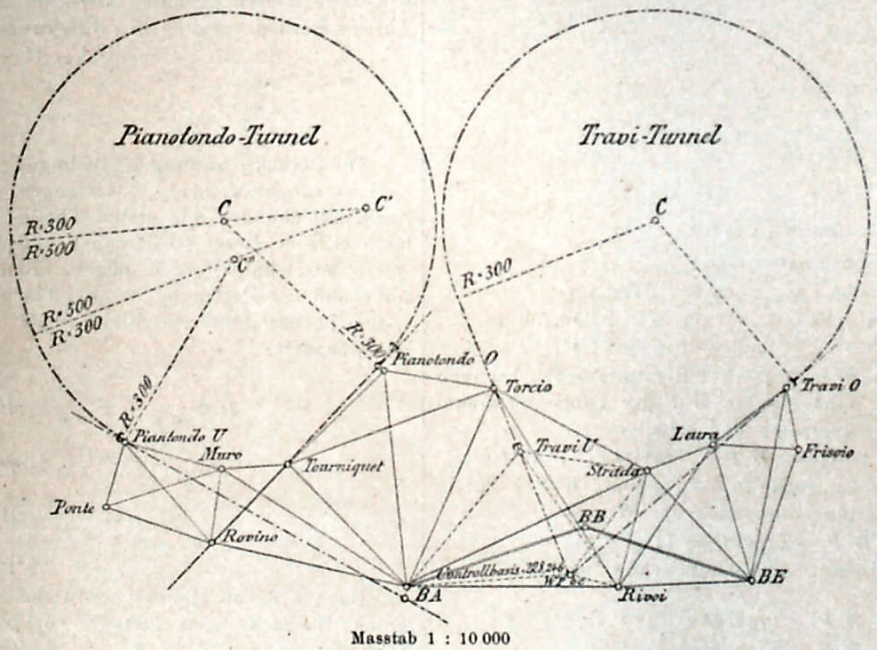
Masstab 1 : 25 000

und Travi U zu erhalten, lassen sich am einfachsten in folgender Weise berechnen. Man stellt zunächst die Verbesserungen für die von der Nullrichtung an gezählten Winkel auf, ganz ebenso wie dies beim Pfaffensprung für die einzelnen Winkel geschah. Die Summe dieser Winkelverbesserungen für jede Station negativ genommen und dividirt durch die Anzahl der Richtungen, gibt die Verbesserung der ersten Richtung und diese abgezogen von den Winkelverbesserungen die Verbesserungen der andern Richtungen. Sind z. B. die Verbesserungen der drei von der Nullrichtung an gezählten Winkel auf der ersten Station v_1 v_2 v_3, so ist die Verbesserung der ersten Richtung

WP	*Travi U*
$y_1 = -9\,189{,}910 + d\,y_1$	$y_2 = -9\,256{,}760 + d\,y_2$
$x_1 = +8\,135{,}820 + d\,x_1$	$x_2 = +7\,961{,}470 + d\,x_2$

erhält man auf diese Weise die folgenden 17 Fehlergleichungen, in welchen die Richtungsverbesserungen in Secunden, die Coordinatenverbesserungen in Centimetern ausgedrückt sind:

$$d_1 = +13{,}10\,d\,x_1 + 6{,}88\,d\,y_1 - 0{,}99\,d\,x_2 + 2{,}58\,d\,y_2 + 16{,}85$$
$$d_2 = +2{,}11\,\text{„}\,+11{,}53\,\text{„}\,+2{,}96\,\text{„}\,-7{,}73\,\text{„}\,+15{,}83$$
$$d_3 = -5{,}35\,\text{„}\,+3{,}64\,\text{„}\,-0{,}99\,\text{„}\,+2{,}58\,\text{„}\,-2{,}63$$
$$d_4 = -9{,}88\,\text{„}\,-22{,}05\,\text{„}\,-0{,}99\,\text{„}\,+2{,}58\,\text{„}\,-30{,}07$$



Masstab 1 : 10 000

$$B\,A \ldots \delta_1 = -\frac{v_1 + v_2 + v_3}{4}$$

und die Verbesserungen der drei folgenden Richtungen

Travi U . . . $\delta_2 = v_1 + \delta_1$

Strada . . . . $\delta_3 = v_2 + \delta_1$

Rivoi . . . . . $\delta_4 = v_3 + \delta_1$

Mit den Näherungswerthen für die beiden Punkte

$$d_5 = +0{,}99\,d\,x_1 - 2{,}58\,d\,y_1 - 8{,}73\,d\,x_2 - 2{,}03\,d\,y_2 - 3{,}94$$
$$d_6 = +0{,}99\,\text{„}\,-2{,}58\,\text{„}\,-0{,}55\,\text{„}\,-1{,}33\,\text{„}\,-0{,}14$$
$$d_7 = -2{,}96\,\text{„}\,+7{,}73\,\text{„}\,+2{,}46\,\text{„}\,-2{,}95\,\text{„}\,+8{,}76$$
$$d_8 = +0{,}99\,\text{„}\,-2{,}58\,\text{„}\,+6{,}80\,\text{„}\,-6{,}29\,\text{„}\,-4{,}70$$
$$d_9 = -2{,}35\,\text{„}\,-1{,}89\,\text{„}\,-2{,}76\,\text{„}\,+0{,}36\,\text{„}\,-3{,}44$$
$$d_{10} = -2{,}35\,\text{„}\,-1{,}89\,\text{„}\,+5{,}53\,\text{„}\,-0{,}71\,\text{„}\,-3{,}12$$
$$d_{11} = +4{,}69\,\text{„}\,+3{,}77\,\text{„}\,-2{,}76\,\text{„}\,+0{,}36\,\text{„}\,+6{,}56$$

$d_{12} = +\ 3{,}80$ „ $-\ 0{,}81$ „ $+2{,}41$ „ $+3{,}13$ „ $+\ 2{,}07$
$d_{13} = -\ 7{,}61$ „ $+\ 1{,}61$ „ $+2{,}41$ „ $+3{,}13$ „ $-\ 4{,}67$
$d_{14} = +\ 3{,}80$ „ $-\ 0{,}81$ „ $-4{,}83$ „ $-6{,}26$ „ $+\ 2{,}59$
$d_{15} = +\ 5{,}31$ „ $+\ 7{,}76$ „ $-0{,}31$ „ $+2{,}90$ „ $+\ 6{,}31$
$d_{16} = -10{,}63$ „ $-15{,}51$ „ $-0{,}31$ „ $+2{,}90$ „ $-\ 8{,}10$
$d_{17} = +\ 5{,}31$ „ $+\ 7{,}76$ „ $+0{,}63$ „ $-5{,}79$ „ $+\ 1{,}80$

Differencirt man die Summe der Quadrate dieser 17 Richtungsverbesserungen nach den vier Unbekannten, so erhält man zur Bestimmung derselben die vier Normalgleichungen:

$$+603{,}22\,dx_1 + 537{,}73\,dy_1 - 43{,}38\,dx_2 - 89{,}55\,dy_2 + 759{,}27 = 0$$
$$+537{,}73\,dx_1 + 1145{,}71\,dy_1 + 68{,}45\,dx_2 - 207{,}05\,dy_2 + 1256{,}69 = 0$$
$$-\ 43{,}38\,dx_1 + 68{,}45\,dy_1 + 221{,}86\,dx_2 + 57{,}39\,dy_2 + 43{,}66 = 0$$
$$-\ 89{,}55\,dx_1 - 207{,}05\,dy_1 + 57{,}39\,dx_2 + 243{,}77\,dy_2 - 247{,}11 = 0$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt:

$dx_1 = -\ 0{,}502$ reciprokes Gewicht $= 0{,}0031$
$dy_1 = -\ 0{,}831$ „ $= 0{,}0020$
$dx_2 = -\ 0{,}075$ „ $= 0{,}0056$
$dy_2 = -\ 0{,}141$ „ $= 0{,}0055$

Die Summe der Fehlerquadrate wird $(\delta\,\delta) = 302$.

Die Zahl der Unbekannten ist $4 + 5 = 9$, nämlich die vier gesuchten Correctionen $dx_2 \ldots dy_2$ und die fünf eliminirten Orientirungsunbekannten für die Richtungsbeobachtungen auf den fünf Stationen. Der mittlere Fehler einer Richtungsangabe wird somit $m = \pm\sqrt{\frac{302}{17-9}} = 6{,}1''$

Uebersichtsplan der zwei Kehrtunnels bei Pianotondo u. Travi

Masstab 1 : 25 000

Die verbesserten Coordinaten sind:

W P	*Travi U*
$y = -\ 9\,189{,}918$	$y = -\ 9\,256{,}759$
$x = +\ 8\,135{,}815$	$x = +\ 7\,961{,}469$

Ausser den im Vorigen mitgetheilten Richtungsbeobachtungen wurde ferner auf dem Winkelpunkte *W P* der Tangentenwinkel mit besonderer Sorgfalt gemessen und erhalten

Tangentenwinkel = Torcio — *W P* — Travi *O* = 71° 4′ 15,4″

Der Punkt Travi *U* war genau in die Tangente *W P* — Torcio eingerichtet worden, es muss also auch der Winkel

Travi *U* — *W P* — Travi *O* = 71° 4′ 15,4″

sein. Aus den Coordinaten gerechnet erhält man für diese Winkel

Torcio — *W P* — Travi *O* = 71° 4′ 19,4″
Travi *U* — *W P* — Travi *O* = 71 4 20,5

Zu den früher aufgestellten 17 Fehlergleichungen treten also jetzt noch die zwei streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen

1) $0 = +\ 4{,}0'' - 2{,}66\,\xi_1 - 7{,}00\,\eta_1$
2) $0 = +\ 5{,}1 - 1{,}32\,\xi_1 - 10{,}50\,\eta_1 - 3{,}95\,\xi_2 + 10{,}31\,\eta_2$

wenn man die weiteren Correctionen der Coordinaten, nach deren Anbringung sie den beiden Bedingungen genügen, mit ξ und η bezeichnet.

Bei der Netzausgleichung für den Pfaffensprung- und auch für den Travi-Tunnel hatte man eine Aufgabe *directer* Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen. Es wurden die Bedingungsgleichungen mit Correlaten multiplicirt, zur Summe der Fehlerquadrate addirt und diese Gesammtsumme konnte dann differencirt werden, als ob sie aus Quadraten von einander unabhängiger Grössen beständen. Bei der Einschaltung der Tangentenpunkte hatte man eine Aufgabe *vermittelnder* Beobachtungen mit einer Bedingungsgleichung. Durch Elimination einer Unbekannten wurde sie auf eine Aufgabe vermittelnder Beobachtungen zurückgeführt. Beide Verfahren liessen sich auch hier anwenden. Entweder könnte man entsprechend der Zahl der Bedingungsgleichungen zwei Unbekannte aus den 17 Fehlerausdrücken eliminiren und erhielte so eine Summe von Quadraten unabhängiger Grössen; oder man könnte die Bedingungsgleichungen mit Correlaten multipliciren, zur Summe der 17 Fehlerquadrate addiren und die Gesammtsumme nach den vier Unbekannten differenciren. Das letztere Verfahren ist von Bessel in der „Gradmessung in Ostpreussen" entwickelt worden. Es gestattet eine Zerlegung der Ausgleichung in zwei Theile. Im ersten werden die Fehlergleichungen als zwischen unabhängigen Grössen bestehend ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen ausgeglichen, im zweiten die durch diese erste Ausgleichung zwischen ihren Resultaten entstehenden Gewichtsbeziehungen durch entsprechendes Umformen der Fehler- und Correlatenausdrücke berücksichtigt.

Ein dritte Methode, hier die bequemste, ist von Hansen angegeben worden und ausführlich auseinandergesetzt im achten Bande der Abhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Auch er zerlegt die Ausgleichung in zwei Theile und berücksichtigt im ersten ebenso wie Bessel nur die Fehlerausdrücke, im zweiten aber formt er die Bedingungsgleichungen so um, dass sie nun zwischen unabhängigen Grössen bestehen, die mit den Resultaten der ersten Ausgleichung in bekanntem Zusammenhange stehen. Den ersten Theil bildet also eine Aufgabe vermittelnder Beobachtungen, der zweite wird durch Umformen auf eine Aufgabe directer Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen zurückgeführt. Der erste Theil der Aufgabe ist im Vorigen bereits gelöst. Um den Gang der Rechnung im zweiten leichter übersehen zu können, sei noch Folgendes bemerkt. Durch Auflösen der Normalgleichungen des ersten Theiles werden erhalten die Näherungswerthe

$dx_1 \ldots$ reciprokes Gewicht $= (\alpha\,\alpha)$
$dy_1 \ldots$ „ $= (\beta\,\beta)$
$dx_2 \ldots$ „ $= (\gamma\,\gamma)$
$dy_2 \ldots$ „ $= (\delta\,\delta)$

Die Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen wird weitere Verbesserungen $\xi_1\ \eta_1\ \xi_2\ \eta_2$ verlangen, denen in den reducirten Normalgleichungen des ersten Theiles Aenderungen der absoluten Glieder dieser Gleichungen entsprechen, welche mit $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3\ \Delta_4$ bezeichnet werden mögen. Beide hängen zusammen entsprechend der Zerlegung in zwei Theile und des Erfülltseins des ersten Theiles durch die Gleichungen (nach der bekannten Bezeichnungsart)

Gewicht

$$\xi_1 + \frac{a\,b}{a\,a}\eta_1 + \frac{a\,c}{a\,a}\xi_2 + \frac{a\,d}{a\,a}\eta_2 + \Delta_1 = 0 \quad (a\,a)$$
$$\eta_1 + \frac{b\,c1}{b\,b1}\xi_2 + \frac{b\,d1}{b\,b1}\eta_2 + \Delta_2 = 0 \quad (b\,b1)$$
$$\xi_2 + \frac{c\,d2}{c\,c2}\eta_2 + \Delta_3 = 0 \quad (c\,c2)$$
$$\eta_2 + \Delta_4 = 0 \quad (d\,d3)$$

Nach der von Helmert entwickelten Theorie der äquivalenten Beobachtungen können vorstehende Gleichungen als Fehlergleichungen, d. h. $\Delta_1 \ldots \Delta_4$ als Correctionen der von einander unabhängigen Grössen $\frac{a\,n}{a\,a}; \frac{b\,n}{b\,b1} \ldots \frac{c\,n_2}{c\,c2}; \frac{d\,n_3}{d\,d3}$; also der absoluten Glieder der reducirten Normalgleichungen des ersten Theiles angesehen werden, wenn man ihnen die respectiven Nenner $(a\,a)$ $(b\,b1)$ $(c\,c2)$ $(d\,d3)$ als Gewichte beilegt. Ersetzt man nun in den Bedingungsgleichungen, welche für die

Correctionen $\xi_1\ \eta_1\ \xi_2\ \eta_2$ aufgestellt wurden, diese durch die $\Delta_1 \ldots \Delta_4$, so erhält man Bedingungsgleichungen zwischen Correctionen unabhängiger Beobachtungsgrössen, welche dem entsprechend weiter behandelt werden können.

Das Umformen der Bedingungsgleichungen geht mit Hülfe der Auflösung der Normalgleichungen des ersten Theiles sehr bequem. Sind die ursprünglichen Bedingungsgleichungen

$$A'\xi_1 + A''\eta_1 + A'''\xi_2 + A''''\eta_2 + w_1 = 0$$
$$B'\xi_1 + B''\eta_1 + B'''\xi_2 + B''''\eta_2 + w_2 = 0$$

so sind die umgeformten

$$A'\Delta_1 + A''1\,\Delta_1 + A'''2\,\Delta_2 + A''''3\,\Delta_3 + w_1 = 0$$
$$B'\Delta_1 + B''1\,\Delta_1 + B'''2\,\Delta_2 + B''''3\,\Delta_3 + w_2 = 0$$

Diese multiplicirt man mit den Correlaten k_1 und k_2, addirt sie zur Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate

$$(a\,a)\,\Delta_1\,\Delta_1 + (b\,b\,1)\,\Delta_2\,\Delta_2 + (c\,c\,2)\,\Delta_3\,\Delta_3 + (d\,d\,3)\,\Delta_4\,\Delta_4$$

differencirt nach allen $\Delta_1 \ldots \Delta_4$, erhält die $\Delta_1 \ldots \Delta_4$ ausgedrückt durch die Correlaten k_1 und k_2, setzt sie in die umgeformten Bedingungsgleichungen ein und bildet so die Normalgleichungen zur Berechnung des k_1 und k_2. Aus den Correlaten findet man die $\Delta_1 \ldots \Delta_4$ und schliesslich mit Hülfe der reducirten Normalgleichungen des ersten Theiles die verlangten Correctionen $\xi_1\ \eta_1\ \xi_2\ \eta_2$, welche beiden Bedingungen genügen.

Es werden die *umgeformten Bedingungsgleichungen*

$$1)\ -2{,}66\,\Delta_1 - 4{,}63\,\Delta_2 + 0{,}55\,\Delta_3 - 1{,}47\,\Delta_4 + 4{,}0 = 0$$
$$2)\ -1{,}32\,\Delta_1 - 9{,}32\,\Delta_2 - 2{,}55\,\Delta_3 + 9{,}24\,\Delta_4 + 5{,}1 = 0$$

Fehlerausdrücke.

$$\Delta_1 = -0{,}00441\,k_1 - 0{,}00219\,k_2$$
$$\Delta_2 = -0{,}00695\,k_1 - 0{,}01399\,k_2$$
$$\Delta_3 = +0{,}00274\,k_1 - 0{,}01263\,k_2$$
$$\Delta_4 = -0{,}00815\,k_1 + 0{,}05106\,k_2$$

Normalgleichungen.

$$+0{,}0574\,k_1 - 0{,}0117\,k_2 + 4{,}0 = 0$$
$$-0{,}0117\,k_1 + 0{,}6371\,k_2 + 5{,}1 = 0$$
$$k_1 = -71{,}223$$
$$k_2 = -9{,}375$$

$$\Delta_1 = +0{,}3346 \qquad \xi_1 = -0{,}250$$
$$\Delta_2 = +0{,}6259 \qquad \eta_1 = +0{,}664$$
$$\Delta_3 = -0{,}0769 \qquad \xi_2 = -0{,}113$$
$$\Delta_4 = +0{,}1019 \qquad \eta_2 = +0{,}102$$

Die beiden Bedingungsgleichungen vergrössern die Gewichte der Coordinatenbestimmung. Die früher ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen berechneten reciproken Gewichte erhalten durch sie einen Abzug und gehen über in

reciprokes Gewicht für $\xi_1 \ldots +0{,}0031 - 0{,}0002 = +0{,}0029$
" $\eta_1 \ldots +0{,}0019 - 0{,}0015 = +0{,}0004$
" $\xi_2 \ldots +0{,}0056 - 0{,}0019 = +0{,}0037$
" $\eta_2 \ldots +0{,}0055 - 0{,}0050 = +0{,}0005$

Die Summe der Fehlerquadrate wird

$$(p\,\Delta\,\Delta) = -(k\,w) = 331{,}6$$

Die Zahl der Ueberschüssigen ist entsprechend den zwei Bedingungsgleichungen gleich 2. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, das ist der einmaligen Richtungsangabe, wird also

$$m = \pm\sqrt{165{,}8} = \pm 12{,}9''$$

Der mittlere Fehler einer Richtungsangabe kann nun auf dreierlei Weise berechnet werden:

1) Aus dem ersten Theile der Ausgleichung

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{302}{8}} = \pm 6{,}1''$$

2) Aus dem zweiten Theile der Ausgleichung

$$m_2 = \pm\sqrt{\frac{331{,}6}{2}} = \pm 12{,}9''$$

3) Aus der Gesammt-Ausgleichung

$$m = \pm\sqrt{\frac{633{,}6}{10}} = \pm 8{,}0''$$

Bekanntlich benutzt man bei der Ausgleichung grosser Dreiecknetze die mehr oder minder grosse Uebereinstimmung der aus dem ersten und zweiten Theile, d. h. aus der Stations- und aus der Netzausgleichung berechneten mittleren Fehler zur Beurtheilung, ob die Gewichte der Beobachtungen richtig angenommen worden sind. Denkt man sich den mittleren Fehler aus einer Anzahl wahrer Fehler abgeleitet, so wird er offenbar aus beiden Theilen der Ausgleichung ganz gleich erhalten werden, denn die Netzbedingungen als solche, welche die geometrische Möglichkeit des Netzes bedingen, können auf den mittleren Fehler ja gar keinen Einfluss haben. Dasselbe muss aber auch bei der Ableitung des mittleren Fehlers aus einer grossen Zahl wahrscheinlicher Fehler der Fall sein, wenn die Zahl, wie bei ausgedehnten Dreiecksnetzen, nur hinreichend gross ist. Wird der mittlere Fehler der Netzausgleichung grösser, als derjenige aus der Stationsausgleichung, so ist dies ein Beweis, dass bei der Beurtheilung der Beobachtungen nicht alle Factoren berücksichtigt worden sind, welche auf dieselben von Einfluss waren. Welcher Natur dieselben sind und ob es in der Macht des Beobachters lag, die sich bei der Netzausgleichung zeigenden Beeinflussungen bei der Stationsausgleichung zu berücksichtigen oder nicht, ist eine zweite Frage; jedenfalls zeigt die Beeinflussung, dass die bei Stationsausgleichung angenommenen Gewichte nicht die wahren Gewichte sind, welche den Beobachtungen zukommen und die Abweichung von der Wahrheit wird um so grösser sein, je grösser der Unterschied der aus beiden Theilen der Ausgleichung berechneten mittleren Fehler ist.

Hier liegt der Fall umgekehrt. Die eingeführten Bedingungen sind keine geometrische Nothwendigkeit und man könnte das dem Ueberwiegen des mittleren Fehlers aus dem zweiten Theile der Ausgleichung eher den Schluss ziehen, dass diese Bedingungen nicht richtig seien. Die beiden Tangenten wurden aber in der Natur mit aller Sorgfalt ausgerichtet und der Winkel, welchen sie einschliessen, von beiden Beobachtern möglichst genau gemessen. Weil wir überzeugt waren, dass die aufgestellten Bedingungen in der Natur wirklich erfüllt sind, wurde ihr Erfülltsein auch von der Rechnung verlangt. Die Zahl der Bedingungsgleichungen ist zu gering und die Berechnung des mittleren Fehlers aus dem zweiten Theile der Ausgleichung daher zu unsicher, um wegen seines etwas grösseren Betrages das *hinreichende* Erfülltsein der aufgestellten Bedingungen zu bezweifeln.

Mit dem mittleren Fehler der Gesammt-Ausgleichung $m = \pm 8{,}0''$ und den oben angegebenen Gewichten werden die mittleren Fehler der gefundenen Verbesserungen für

$$x_1 \ldots m = \pm 8{,}0''\sqrt{0{,}0029} = \pm 0{,}43\ cm$$
$$y_1 \ldots m = \pm 8{,}0''\sqrt{0{,}0004} = \pm 0{,}16\ ,$$
$$x_2 \ldots m = \pm 8{,}0''\sqrt{0{,}0037} = \pm 0{,}49\ ,$$
$$y_2 \ldots m = \pm 8{,}0''\sqrt{0{,}0005} = \pm 0{,}18\ ,$$

Die definitiven Coordinaten werden somit für

W P	*Travi U*
$y_1 = -9\,189{,}912\,m \pm 2\,mm$	$y_2 = -9\,256{,}758\,m \pm 2\,mm$
$x_1 = +8\,135{,}813\,m \pm 4\,mm$	$x_2 = +7\,961{,}468\,m \pm 5\,mm$

Hiermit erhält man die Azimuthe:

$$W\,P - \text{Torcio} = 200^0\,58'\,38{,}9''$$
$$W\,P - \text{Travi}\,U = 200\ \ 58\ \ 38{,}9$$
$$W\,P - \text{Travi}\,O = 272\ \ \ 2\ \ 54{,}3$$
$$\text{Tangentenwinkel} = 71^0\ \ 4'\,15{,}4''$$

Die aufgestellten Bedingungen sind somit beide erfüllt.

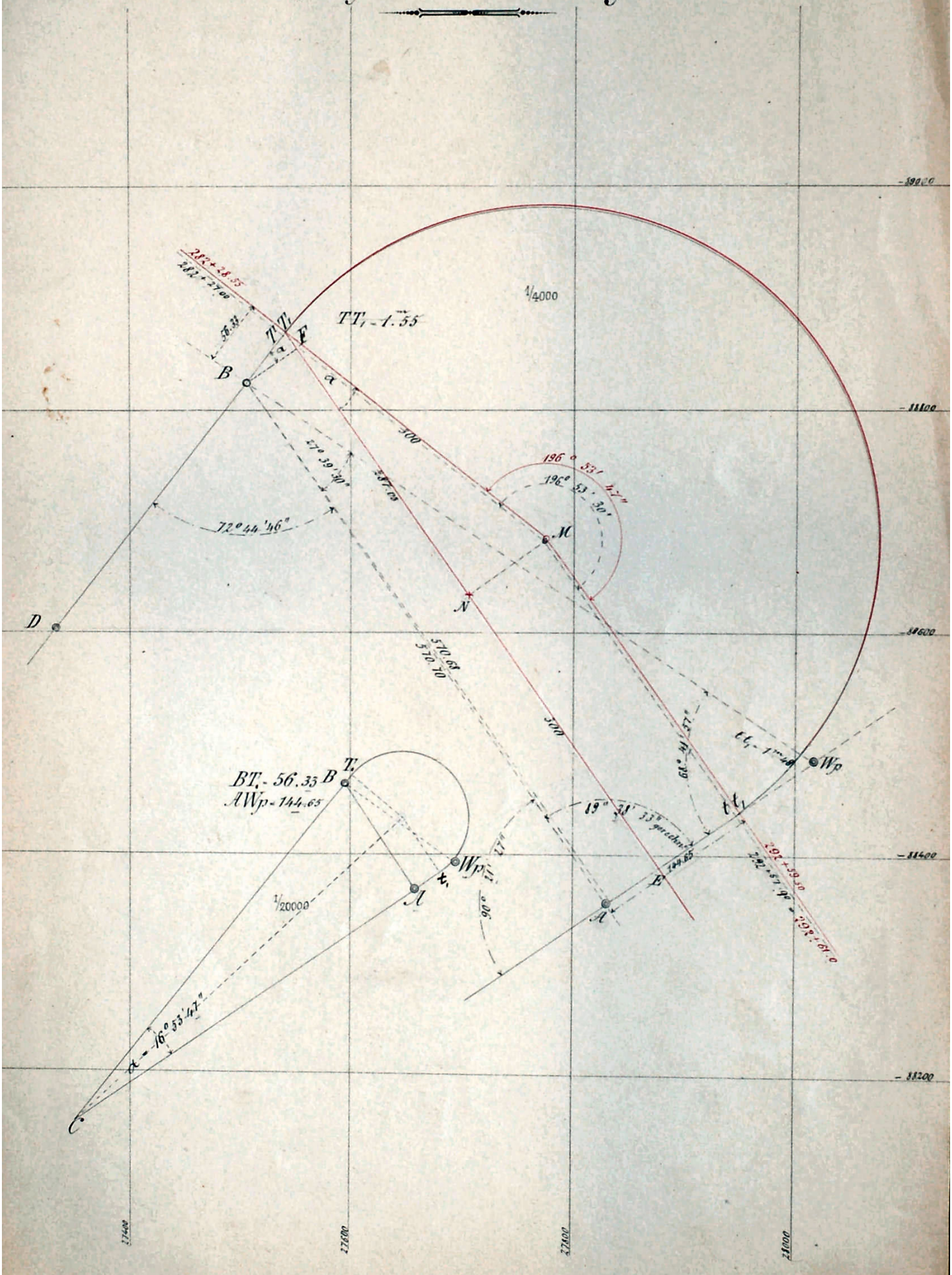
Der Travi-Kehrtunnel liegt vom Eingange Travi *U* aus zunächst noch circa 200 *m* in der Geraden. Da der Radius 300 *m* beträgt, so ist die Uebergangscurve = 40 *m* und die Tangentenverschiebung = 0,222 *m*. Die Tangenten werden 400,110 *m* und 420,269 *m* lang. Es ist daher zu messen

von Travi *U* bis zur Uebergangscurve 400,110 — 186,720 = 213,390 *m*
von Travi *O* bis zum Berührungspunkt 420,269 — 390,986 = 29,283 *m*

Die Coordinaten des Kreismittelpunktes werden

$$y = -9\,620{,}635 \qquad x = +7\,851{,}027$$

Tunnellänge (rund) = 1 550 *m*.

Die Absteckung im Tunnel selbst geschieht polygonometrisch. Vergleicht man die Coordinaten irgend eines Punktes der Tunnelcurve mit den Coordinaten des Centrums, so ergibt sich unmittelbar, ob der Abstand der verlangte ist oder nicht. Um eine stete Controle zu haben, wird die Absteckung in den Kehrtunnels immer zweimal ausgeführt, zuerst von den Ingenieuren der Unternehmung, das zweite Mal zur Controle von den Beamten der Gotthardbahngesellschaft, in Wasen und Giornico den beiden genannten Herren Sectionsgeometern Mächler und Dress, in Faido dem Bauführer der beiden dortigen Kehrtunnels, Herrn Niederfrieninger. Die beiden kürzesten Kehrtunnels, der Wattinger und der Leggistein Tunnel in der Schleife bei Wasen, werden schon im nächsten Winter, die andern fünf, bei welchen Maschinen-Bohrung angewandt wird, voraussichtlich ein halbes bis ein Jahr später durchgeschlagen werden.

Kehrtunnel in Wattingen.